

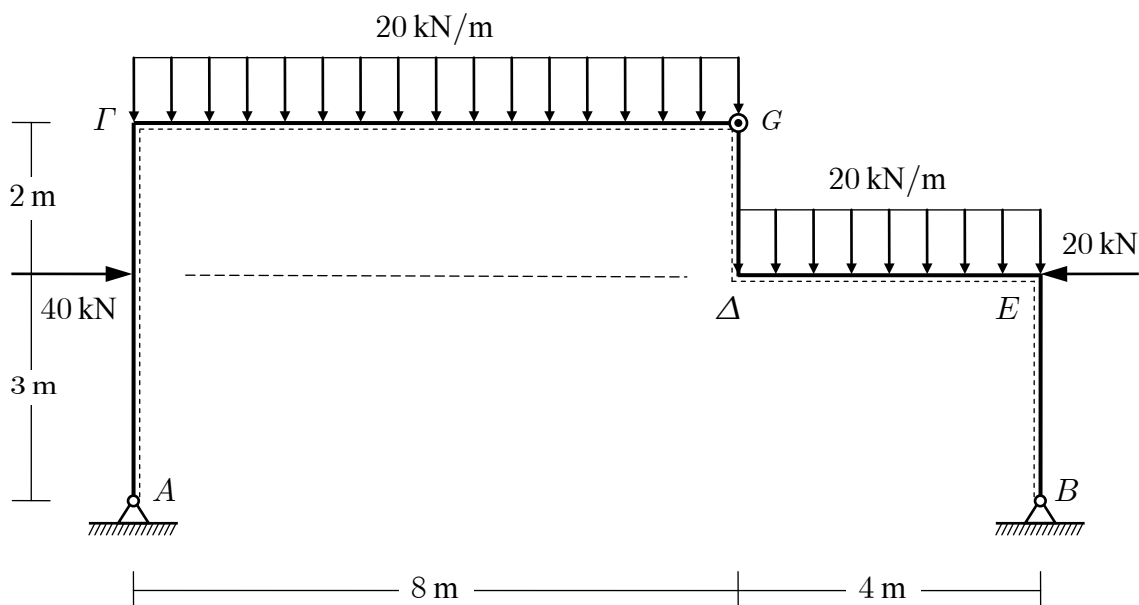
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

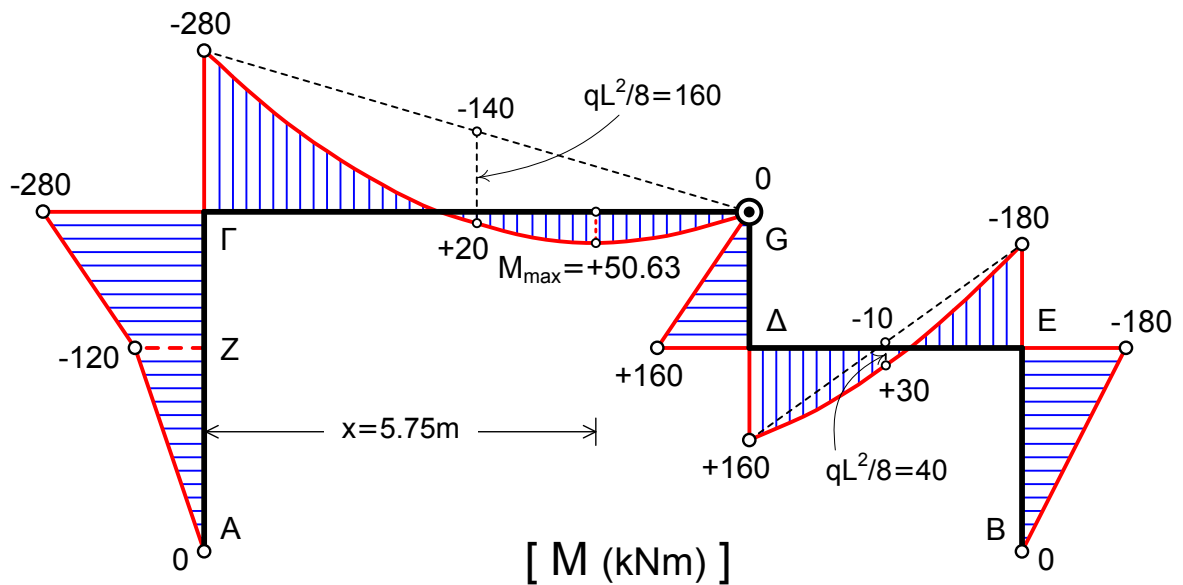
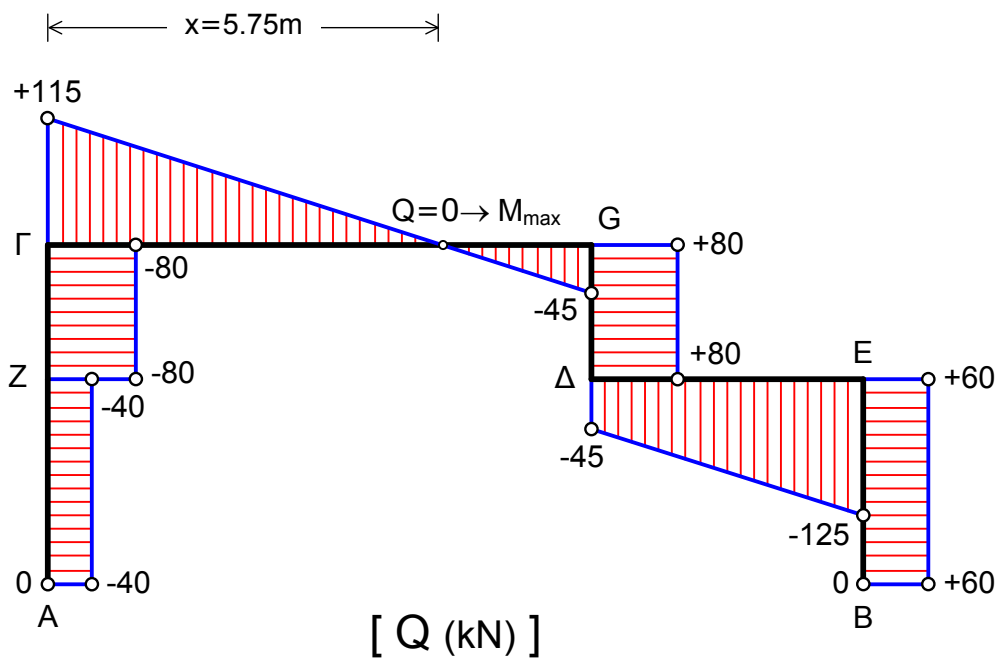
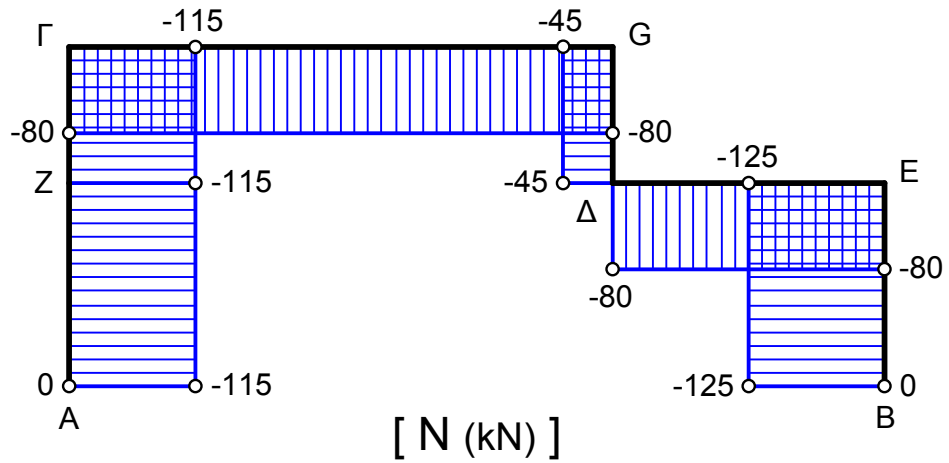
(1^η περίοδος εαρινού εξαμήνου 2009-10)

ΘΕΜΑ 1^ο (35%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής στο ζύγωμα GG .



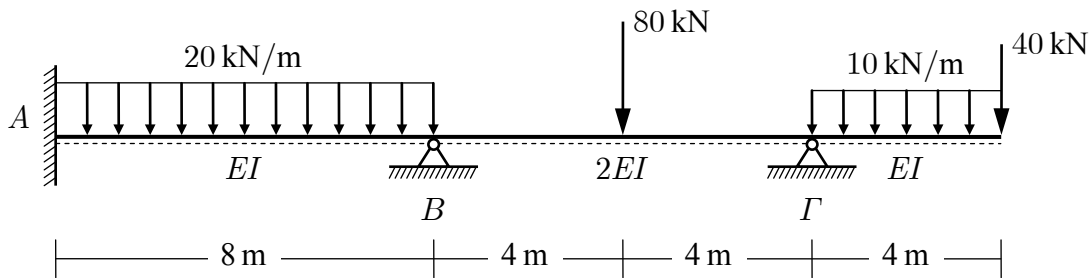
$$A_x = 40 \text{ kN}, A_y = 115 \text{ kN}, B_x = -60 \text{ kN} \text{ και } B_y = 125 \text{ kN}$$



ΘΕΜΑ 2^ο (40%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων (ή τη μέθοδο Cross).

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία *A*, *B* και *Γ*.
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις *A*, *B* και *Γ* του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}, \quad Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1, \quad Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1, \quad Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{3PL}{16}, \quad Q_A = \frac{11P}{16}, \quad Q_B = -\frac{5P}{16}$
	$M_A = \frac{M}{2}\left(1 - \frac{3b^2}{L^2}\right)$ $Q_A = \frac{3M}{2L}\left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right), \quad Q_B = \frac{3M}{2L}\left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right)$

Λύση:

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια στροφή ϕ (έστω αριστερής φοράς) στον κόμβο B .

Δοκός AB (αμφίπακτη):

$$M_{AB} = \frac{2EI}{8}\phi + \frac{20 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI\phi}{4} + \frac{320}{3}$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{8}\phi - \frac{20 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI\phi}{2} - \frac{320}{3}$$

Δοκός BΓ (μονόπακτη):

Η δοκός $B\Gamma$ φορτίζεται με τη δύναμη των 80 kN, τη στροφή ϕ στον κόμβο B και μία ροπή στον κόμβο Γ που προέρχεται από τα φορτία του προβόλου,

$$M_{\text{προβ.}} = 4 \cdot 40 + (4 \cdot 10) \cdot 2 \Rightarrow M_{\text{προβ.}} = 240 \text{ kNm}$$

Επομένως,

$$M_{B\Gamma} = \frac{3(2EI)}{8}\phi + \frac{3 \cdot 8 \cdot 08}{16} + \frac{(-M_{\text{προβ.}})}{2} \left(1 - \frac{3 \cdot 0^2}{8^2}\right)$$

$$\Rightarrow M_{B\Gamma} = \frac{3EI\phi}{4} + 120 + \frac{(-240)}{2} = \frac{3EI\phi}{4}$$

Ισοροπία κόμβου B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{B\Gamma} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{2} - \frac{320}{3}\right) + \left(\frac{3EI\phi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5EI\phi}{4} = \frac{320}{3} \Rightarrow \boxed{EI\phi = \frac{256}{3} = 85.33}$$

Ακραίες ροπές:

Οι ακραίες ροπές υπολογίζονται με απευθείας αντικατάσταση της τιμής της στροφής του κόμβου B στις ανωτέρω εκφράσεις

$$M_{AB} = \frac{256}{4 \cdot 3} + \frac{320}{3} \Rightarrow M_{AB} = \frac{64}{3} + \frac{320}{3} = \frac{384}{3} \Rightarrow \boxed{M_{AB} = 128 \text{ kNm}}$$

$$M_{BA} = \frac{EI\phi}{2} - \frac{320}{3} \Rightarrow M_{BA} = \frac{256}{2 \cdot 3} - \frac{320}{3} = -\frac{192}{3} \Rightarrow \boxed{M_{BA} = -64 \text{ kNm}}$$

$$M_{B\Gamma} = \frac{3 \cdot 256}{4 \cdot 3} \Rightarrow \boxed{M_{B\Gamma} = 64 \text{ kNm}}$$

Τέμνουσες δυνάμεις:

Ισορροπία δοκού AB και ροπές στο άκρο της B :

$$Q_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{8} + \frac{20 \cdot 8}{2} = \frac{128 + (-64)}{8} + \frac{20 \cdot 8}{2} \Rightarrow \boxed{Q_{AB} = 88 \text{ kN}}$$

Ισορροπία δοκού AB και δυνάμεις στη κατακόρυφη διεύθυνση:

$$Q_{BA} = Q_{AB} - 20 \cdot 8 = 88 - 160 \Rightarrow \boxed{Q_{BA} = -72 \text{ kN}}$$

Ισορροπία δοκού $B\Gamma$ και ροπές στο άκρο της Γ :

$$Q_{B\Gamma} = \frac{M_{B\Gamma} - M_{\text{προβ.}}}{8} + \frac{80 \cdot 4}{8} = \frac{64 - 240}{8} + 40 \Rightarrow \boxed{Q_{B\Gamma} = 18 \text{ kN}}$$

Ισορροπία δοκού $B\Gamma$ και δυνάμεις στη κατακόρυφη διεύθυνση:

$$Q_{\Gamma B} = Q_{B\Gamma} - 80 = 18 - 80 \Rightarrow \boxed{Q_{\Gamma B} = -62 \text{ kN}}$$

Ισορροπία προβόλου και δυνάμεις στη κατακόρυφη διεύθυνση:

$$Q_{\text{προβ.}} = 10 \cdot 4 + 40 = 40 + 40 \Rightarrow \boxed{Q_{\text{προβ.}} = 80 \text{ kN}}$$

Αντιδράσεις:

Ισορροπία κατακορύφων δυνάμεων στον κόμβο B :

$$R_B = Q_{B\Gamma} - Q_{BA} = 18 - (-72) \Rightarrow \boxed{R_B = 90 \text{ kN}}$$

Ισορροπία κατακορύφων δυνάμεων στον κόμβο Γ :

$$R_\Gamma = Q_{\text{προβ.}} - Q_{\Gamma B} = 80 - (-62) \Rightarrow \boxed{R_\Gamma = 142 \text{ kN}}$$

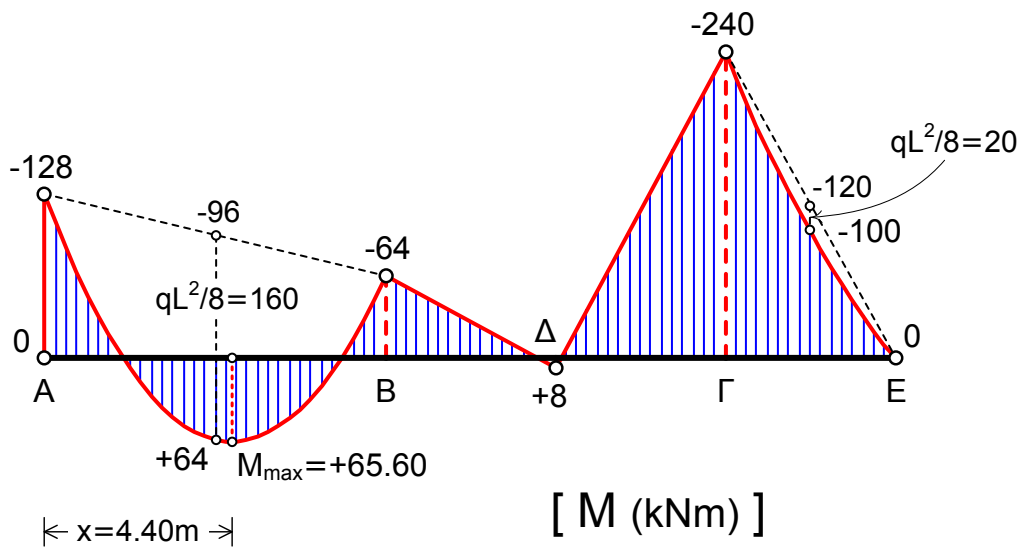
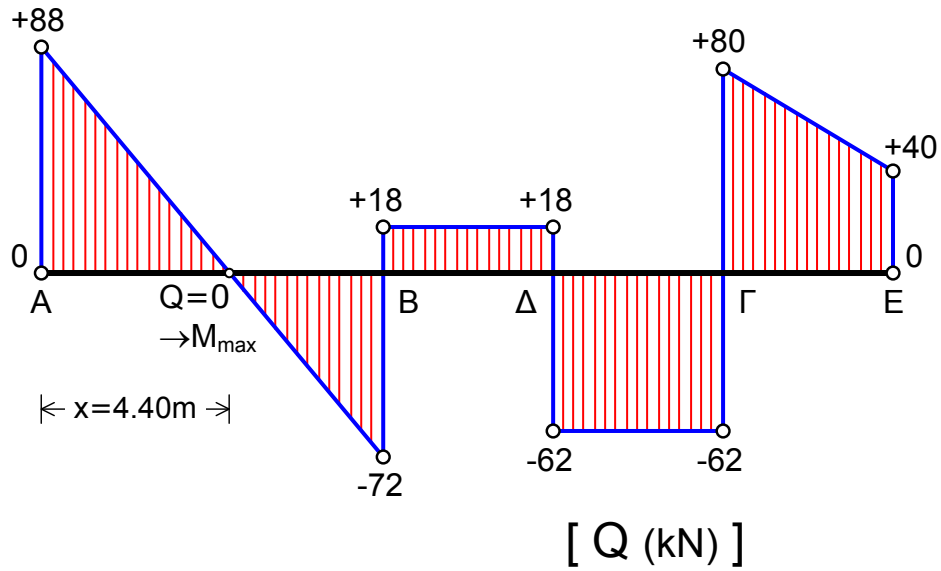
Μέγιστη θετική ροπή:

Αυτή εμφανίζεται στο άνοιγμα AB όπου μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη. Η θέση και τιμή της μέγιστης ροπής είναι:

$$x = \frac{Q_{AB}}{20} = \frac{88}{20} \Rightarrow \boxed{x = 4.40 \text{ m}} \quad (\text{δεξιά του κόμβου } A)$$

$$M_{\max} = -M_{AB} + \frac{1}{2} Q_{AB} \cdot x = -128 + \frac{1}{2} 88 \cdot 4.40 \Rightarrow \boxed{M_{\max} = +65.60 \text{ kNm}}$$

Διαγράμματα Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών

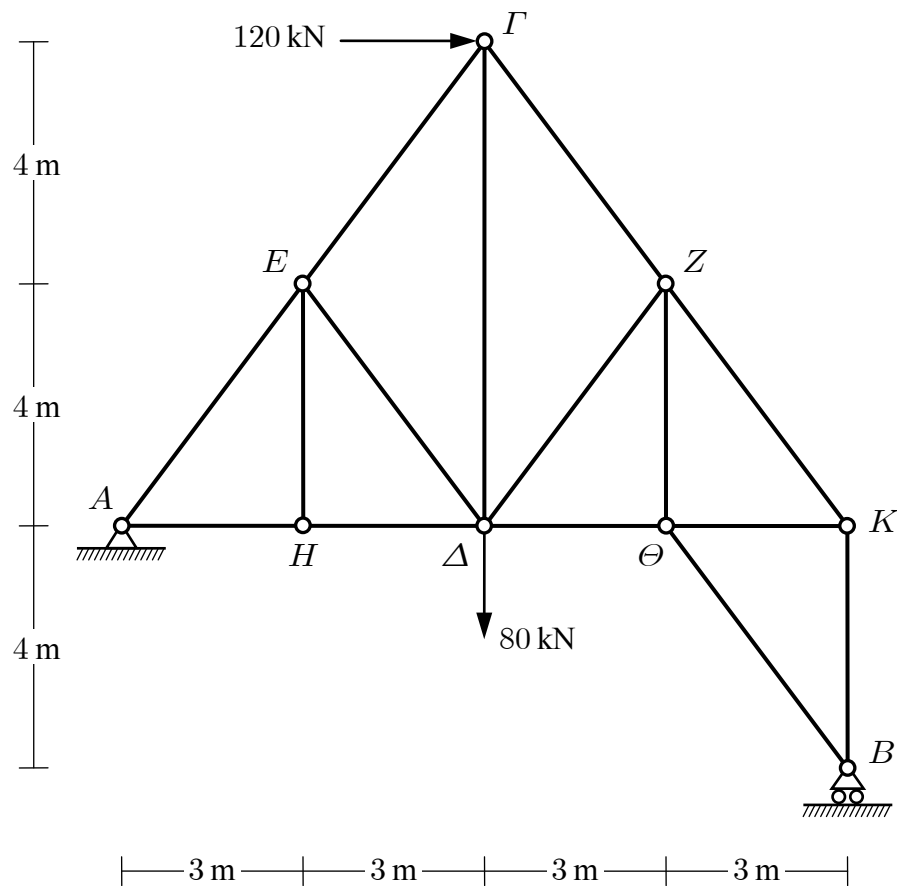


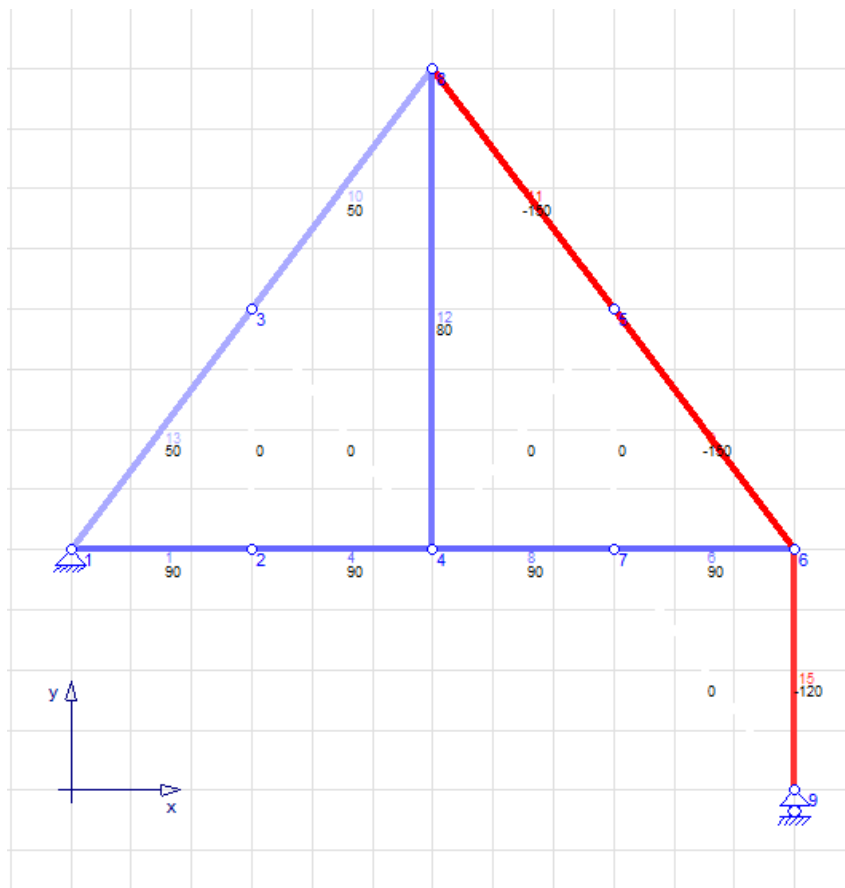
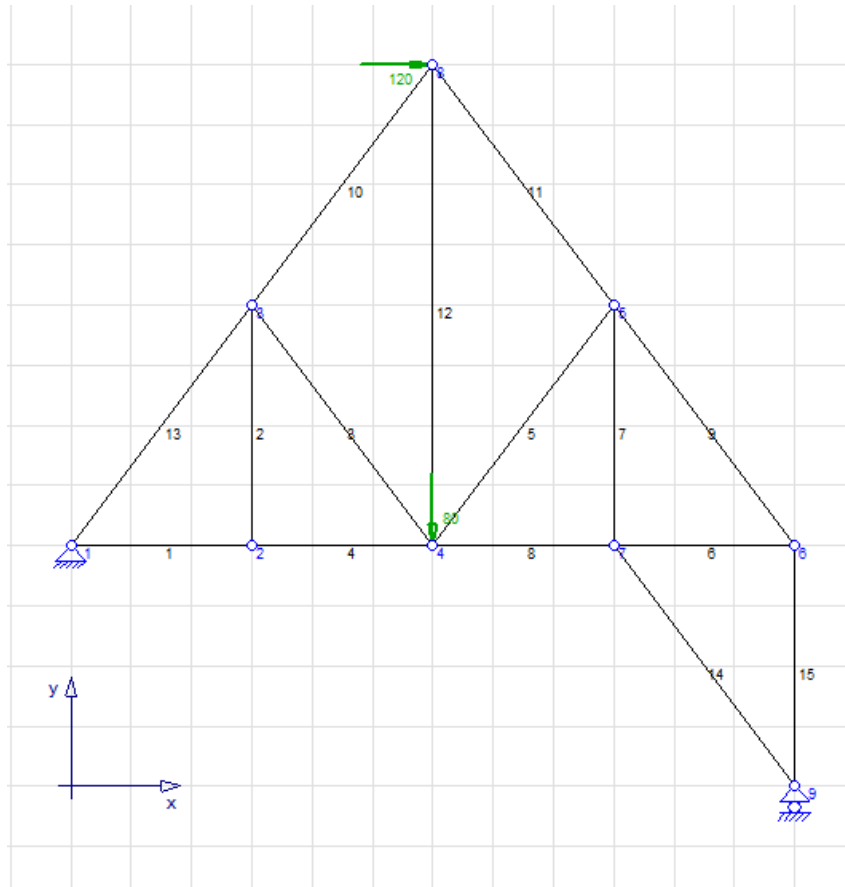
ΘΕΜΑ 3^ο (30%) (επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- Να προσδιορισθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη.
- Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των τομών οι δυνάμεις στα μέλη ΔZ , $\Delta \Theta$ και ΓZ .
- Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στις ράβδους AE , AH , EH , $E\Delta$ και $E\Gamma$.

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.





ΘΕΜΑ 3^ο (30%) (επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

Για τη συνεχή δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής:

- (α) των αντιδράσεων στις στηρίξεις A και Γ ,
- (β) της τέμνουσας Q_i στη τομή i , και
- (γ) της καμπτικής ροπής M_B στη στήριξη B .

